Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 519.212.2, 519.214.5

Шибанов Олег Константинович

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ МНОГОЭТАПНЫХ СХЕМ РАЗМЕЩЕНИЯ ЧАСТИЦ ПО ЯЧЕЙКАМ

01.01.05 — Теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2009

Работа выполнена на кафедре математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, Зубков Андрей Михайлович.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор, Ивченко Григорий Иванович.
	кандидат физико-математических наук, Шабанов Дмитрий Александрович.
Ведущая организация:	Белорусский Государственный Университет.

Защита диссертации состоится 30 октября 2009 года в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском Государственном Университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские Горы, МГУ, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 29 сентября 2009 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор И.Н. Сергеев

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Решение вероятностных задач, связанных с дискретными распределениями, часто приводит к изучению сумм случайных индикаторов, то есть сумм случайных величин, каждая из которых принимает значения из множества $\{0, 1\}$. Формулы для точного распределения суммы случайных индикаторов в большинстве случаев являются громоздкими и неудобными для практического использования. Стандартным методом преодоления этих трудностей является использование аппроксимаций исследуемого распределения с помощью предельных теорем.

Классическая теорема Пуассона для схемы испытаний Бернулли [1] является примером применения аппроксимаций к суммам случайных индикаторов. Следует отметить, что эта теорема применима только к суммам независимых одинаково распределенных индикаторов, в то время как в большинстве практических задач участвуют суммы зависимых индикаторов, зачастую с разными распределениями. В таких случаях требуется применять иные методы пуассоновской аппроксимации, к примеру, предложенные в работах Б.А. Севастьянова [2], А.М. Зубкова [3], В.Г. Михайлова [4] или часто используемый в последнее время метод Чена-Стейна [5] [6].

Одной из первых задач для сумм зависимых случайных индикаторов, полностью исследованной во всех областях изменения параметров, является классическая задача о размещении частиц по ячейкам. Пусть n частиц размещаются по N ячейкам независимо и равновероятно. Обозначим через $\mu_r = \mu_r(n, N)$ число ячеек, содержа-

[1]См., например, Ширяев А.Н. *Вероятность.* В 2 кн. — М.: МЦНМО, 2004, т. 1, § 6.

[2]Севастьянов Б.А. *Предельный закон Пуассона в схеме сумм зависимых случайных величин.* — Теория вероятностей и ее применения, 1972, т. XVII, вып. 4, с. 733-738.

[3]Зубков А.М. *Неравенства для распределения суммы функций от независимых случайных величин.*—Математические заметки, т. 22, номер 5 (1977), с. 745-758.

[4]Михайлов В.Г. *Неторорые оценки точности пуассоновской аппроксимации для суммы зависимых случайных индикаторов.* —Обозрение прикладной и промышленной математики, 1994, вып. 4, т. 1

[5]Barbour A.D., Chen L.H.Y. *An introduction to Stein's method.* — World Scientific, 2005.

[6]Barbour A.D., Holst L, Janson S. *Poisson Approximation.* — Oxford University Press, 2002

щих в точности r частиц. В зависимости от взаимного поведения n, N выделяются области, в которых предельное распределение μ_r является распределением Пуассона или нормальным распределением [7].

Новым обобщением классической схемы размещения частиц по ячейкам является многоэтапная схема, а также ее предельный вариант — схема размещения с бесконечным числом этапов. В данной работе мы изучаем двухэтапную схему и схему с бесконечным числом этапов.

Будем считать, что множество ячеек разделено на слои и в j-м слое содержится N_j ячеек. На первом этапе N_0 исходных частиц независимо размещаются по N_1 ячейкам первого слоя в соответствии с распределением $\mathbf{p}^{(1)} = (p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, ..., p_{N_1}^{(1)})$. На втором этапе N_1 ячеек первого слоя рассматриваются как частицы, и они независимо размещаются по N_2 ячейкам второго слоя вместе с попавшими в них исходными частицами в соответствии с распределением $\mathbf{p}^{(2)} = (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, ..., p_{N_2}^{(2)})$. Размещения продолжаются аналогично m раз, то есть на последнем этапе ячейки $(m-1)$-го слоя размещаются по ячейкам m-го слоя. Такую схему размещения естественно называть m-этапной. Будем через $\mu_r^{(m)}(N_0, N_1, ..., N_m, \mathbf{p}^{(1)}, ..., \mathbf{p}^{(m)}) = \mu_r^{(m)}$ обозначать число ячеек m-го слоя, в которые попало ровно r исходных частиц.

Несколько позже первого упоминания данной схемы размещения [8] был опубликован тезис [9], в котором был рассмотрен один вариант двухэтапной схемы.

Пусть ячейки первого уровня размещаются по ячейкам второго уровня в соответствии с равномерным распределением; обозначим через A_{ji} событие [j-я ячейка 1-го слоя попала в i-ю ячейку 2-го слоя]. После этого частицы распределяются по ячейкам второго слоя в соответствии со случайным вектором вероятностей π таким, что $\pi_i = \sum_{j=1}^{N_1} \frac{1}{N_1} X(A_{ji})$, здесь $X(A)$ - индикатор события A. Полученное таким образом размещение аналогично равновероятной на обоих этапах двухэтапной схеме размещения.

Для различных целых неотрицательных чисел $r_1, ..., r_s$ обозначим $\mathbf{r} = (r_1, ..., r_s)$,

[7] Колчин В.Ф., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. *Случайные размещения.*—М.: Наука, 1976.

[8] Зубков А. М., Шибанов О. К. *Многоступенчатые схемы размещения частиц по ячейкам.* — Обозр. прикл. и промышл. матем., 2002, т. 9, вып. 1, с. 115–116.

[9] Агиевич С. В. *Двухэтапные размещения и двойная Q-функция.* — Обозр. прикл. и промышл. матем., 2003, т. 10, вып. 1, с. 82.

и пусть $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_s)$, а $\mathbf{x}^{\mathbf{k}} = x_1^{k_1} ... x_s^{k_s}$. Введем производящую функцию

$$\Phi_{N,\mathbf{r}}(\mathbf{x}, y, z) = \sum_{\mathbf{k} \geq 0, m, n \geq 0} \frac{N_2^{N_1} N_1^{N_0}}{N_1! N_0!} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} y^{N_1} z^{N_0} \mathbf{P}(\mu_{r_1} = k_1, ..., \mu_{r_s} = k_s).$$

В тезисе [9] показано, что

$$\Phi_{N,\mathbf{r}}(\mathbf{x}, y, z) = \left(e^{ye^z} + \sum_{i=1}^{s} \left[(x_i - 1) \frac{z^{r_i}}{r_i!} \sum_{m \geq 0} \frac{y^m m^r}{m!} \right] \right)^{N_2}.$$

Бесконечная схема размещения, в которой $m = \infty$ и частицы, попавшие в одну ячейку на любом этапе, считаются склеившимися в новую частицу, была впервые упомянута в статье Кингмана [10] в терминах моделей популяционной генетики. Эта схема изучалась на протяжении долгого времени, и первые доказательства предельной теоремы для времени ожидания до объединения всех частиц, которую мы устанавливаем в третьей главе, были получены как частный случай в моделях математической генетики [11]. Следует отметить, что доказательство в этих работах было весьма сложным и использовало специальные схемы слабой сходимости случайных процессов к марковским цепям. В дальнейшем более простое доказательство было получено в относительно недавней работе [12], которая также использовала результаты других авторов [13]. Более общее доказательство для неравновероятных размещений было установлено в неопубликованной статье [14]. В отличие от приведенных работ, доказательство диссертации является более простым и использует новые оценки для «хвостов» распределения числа непустых ячеек в классической схеме размещения частиц.

[10] Kingman J.F. *The coalescent.* — Stochastic Proc. Appl., 1982, vol. 13, pp. 235-248.

[11] см., например, Donnelly P. *Weak convergence to a Markov chain with an entrance boundary: ancestral processes in population genetics.* — The Annals of Probability, 1991, vol. 19, no. 3, pp. 1102-1117.

[12] Goh W.M.Y., Hitczenko P., Schmutz E. *Iterating random functions on a finite set.* — preprint, 2006.

[13] Dalal A., Schmutz E. *Compositions of random functions on a finite set.* — Electronic Journal of Combinatorics, 2002, vol. 9, R26.

[14] McSweeney J.K., Pittel B.G. *Expected coalescence time for a nonuniform allocation process.* — preprint, September 2008.

Цель работы

Цель работы - исследование предельных распределений числа ячеек, содержащих фиксированное число частиц, в двухэтапной схеме размещения, а также условий объединения всех частиц и распределения момента объединения всех частиц в бесконечной схеме размещения частиц по ячейкам.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Найдены условия, при которых в двухэтапной схеме размещения частиц по ячейкам распределение числа ячеек, содержащих заданное число частиц, сходится к распределению Пуассона.

2. Найдены условия, при которых в двухэтапной схеме размещения частиц по ячейкам распределение числа ячеек, содержащих заданное число частиц, сходится к нормальному распределению, и получены оценки скорости сходимости.

3. В классической схеме размещения частиц по ячейкам получены новые неравенства для моментов числа ячеек, содержащих заданное число частиц, и для «хвостов» распределения числа заполненных ячеек.

4. В схеме равновероятного размещения частиц по ячейкам с бесконечным числом этапов найдены необходимые и достаточные условия, при которых предельное распределение числа объединенных частиц невырожденно.

Также новым способом доказан ранее известный факт, что в схеме с одинаковым количеством ячеек на каждом этапе, предельное распределение времени ожидания до момента объединения всех частиц сходится к распределению суммы бесконечного ряда независимых экспоненциально распределенных случайных величин.

Методы исследования

В диссертации используется метод моментов доказательства предельных теорем, вариация метода В.Г. Михайлова [15] доказательства асимптотической нормальности и прямые комбинаторно-вероятностные методы.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в математических моделях биологии и анализе алгоритмов. Разработанные в диссертации методы могут быть полезны специалистам МГУ им. М.В. Ломоносова и Математического института им. В.А. Стеклова.

Апробация работы

Изложенные в диссертации результаты неоднократно докладывались на семинаре "Дискретные задачи теории вероятностей" под руководством д.ф.-м.н. А.М. Зубкова в МГУ им. М.В. Ломоносова (2002-2006 гг.), а также на семинаре Отдела дискретной математики в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН (2005 г.), на Симпозиумах по Прикладной и Промышленной Математике, (2002 и 2003 гг., Сочи) и на конференции "Ветвящиеся процессы в случайной среде", Франкфурт, Германия (2004 г.).

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 6 работах, список которых приведен в конце автореферата. В совместных работах вклад научного руководителя А.М. Зубкова состоял в постановке задач и выборе метода, а диссертанта - в поиске и разработке доказательств.

[15] Михайлов В.Г. *Центральная предельная теорема для схемы независимого размещения частиц по ячейкам.* — Труды Математического института АН СССР, 1981, т. 157, с. 138-152

Структура диссертации

Диссертация состоит из оглавления, введения, трех глав и списка литературы, насчитывающего 33 наименования. Общий объем диссертации - 96 страниц.

Краткое содержание диссертации

Во введении приведен краткий обзор по тематике работы, изложены цели исследования, а также перечислены основные полученные результаты.

Первая глава состоит из двух параграфов. В первом из них исследуется равновероятная, во втором - полиномиальная схема двухэтапного размещения частиц. Полиномиальная схема является более общей; для равновероятной схемы сходимость к распределению Пуассона доказана в условиях, которые не следуют из аналогичной теоремы для полиномиальной схемы. В связи с этим результаты, относящиеся к равновероятному распределению, выделены в отдельный параграф.

В случае равновероятной схемы векторы вероятностей на обоих этапах состоят из одинаковых чисел: $\mathbf{p}^{(1)} = \left(\frac{1}{N_1}, ..., \frac{1}{N_1}\right)$, $\mathbf{p}^{(2)} = \left(\frac{1}{N_2}, ..., \frac{1}{N_2}\right)$.

Установлен следующий результат:

Теорема 1. *Если в равновероятной двухэтапной схеме размещения частиц $r > 1$ фиксировано, $N_0, N_1, N_2 \to \infty$ так, что $N_0 = o(N_2)$, $N_0 = O(N_1)$ и*

$$\mathbf{E}\mu_r^{(2)} \to \lambda \in (0, \infty),$$

то

$$\mathbf{P}(\mu_r^{(2)} = k) \to \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Для первого момента $\mu_r^{(2)}$ получены явные асимптотические формулы с оценками остаточных членов.

Лемма 1. *В равновероятной двухэтапной схеме при любом $r \geq 2$*

$$\mathbf{E}\mu_r^{(2)} = \frac{N_0^r}{r! N_1^{r-1}}\, e^{-\frac{N_0}{N_1}} \left(1 + O\left(\frac{N_1}{N_2} + \frac{1}{N_0} + \frac{1}{N_1}\right)\right),$$

если $N_0 \to \infty$, $N_0 = O(N_1)$, $N_1 = O(N_2)$, а если $N_0 \to \infty$, $N_0 = o(\min\{N_1, N_2\})$, $N_2 = O(N_1)$, то

$$\mathbf{E}\mu_r^{(2)} = \frac{N_0^r}{r! N_2^{r-1}} \left(1 + O\left(\frac{N_0}{N_2} + \frac{1}{N_0} + \frac{N_2}{N_1}\right)\right).$$

Во втором параграфе главы 1 мы изучаем полиномиальную схему двухэтапного размещения частиц, то есть такую схему, в которой распределения вероятностей на обоих этапах могут отличаться от равномерного.

Обозначим через $p_*^{(1)} = \max(p_1^{(1)}, \ldots, p_{N_1}^{(1)})$, $p_*^{(2)} = \max(p_1^{(2)}, \ldots, p_{N_2}^{(2)})$.

Доказана теорема Пуассона для такой схемы размещения:

Теорема 2. *Если параметры двухступенчатой схемы размещения изменяются так, что* $\min\left(N_0, N_1^{1-[r/2]^{-1}}\right) p_*^{(1)} \to 0,\ \min(N_0, N_1) p_*^{(2)} \to 0,\ \mathbf{E}\mu_r^{(2)} \to \lambda \in (0, \infty)$, *то*

$$\mathbf{P}(\mu_r^{(2)} = k) \to \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

При доказательстве этой теоремы используется следующее утверждение, относящееся к обычной полиномиальной схеме размещения и представляющее самостоятельный интерес.

Теорема 3. *При любых целых* $l, m \geq 1$, $l + m < N_0$, *справедливы неравенства*

$$C_{l+m}^l \frac{1}{N_1} \left(1 - p_*^{(1)}\right)^{N_0} \left(1 - \frac{l}{N_0 - m}\right)^m \leq \frac{\mathbf{E}\mu_{l+m}}{\mathbf{E}\mu_l \mathbf{E}\mu_m} \leq$$

$$\leq C_{l+m}^l N_1^{l-1} \left(p_*^{(1)}\right)^l \frac{1}{\left(1 - p_*^{(1)}\right)^{2N_0}}.$$

В частности, если $l, m \geq 1$ *фиксированы, а* $\min\left(N_0, N_1^{1-(\min(l,m))^{-1}}\right) p_*^{(1)} \to 0$, *то*

$$\mathbf{E}\mu_{l+m} = o(\mathbf{E}\mu_l \mathbf{E}\mu_m).$$

При условиях теоремы 2 найдено распределение максимального заполнения ячеек.

Теорема 4. *Если параметры двухступенчатой схемы размещения изменяются так, что* $\min\left(N_0, N_1^{1-[r/2]^{-1}}\right) p_*^{(1)} \to 0,\ \min(N_0, N_1) p_*^{(2)} \to 0,\ \mathbf{E}\mu_r^{(2)} \to \lambda \in (0, \infty)$, *то*

$$\mathbf{P}(\max\{j : \mu_j^{(2)} > 0\} = r) \to 1 - e^{-\lambda}, \quad \mathbf{P}(\max\{j : \mu_j^{(2)} > 0\} = r - 1) \to e^{-\lambda}.$$

Вторая глава диссертации состоит из двух параграфов. Она посвящена доказательству центральной предельной теоремы в двухэтапной схеме размещения частиц, в которой частицы на первом этапе размещаются в соответствии с полиномиальным распределением $\mathbf{p}^{(1)}$, а на втором этапе - в соответствии с равновероятным распределением $\mathbf{p}^{(2)} = \left(\frac{1}{N_2}, ..., \frac{1}{N_2}\right)$.

В первом параграфе устанавливается уточнение упомянутой выше статьи [15], необходимое для доказательства предельной теоремы для двухэтапной схемы размещения частиц. Мы не приводим формулировок, относящихся к этой части диссертации, поскольку данный параграф является вспомогательным, а формулировки довольно громоздкими.

Во втором параграфе, пользуясь полученными результатами, мы доказываем центральную предельную теорему для нормированной случайной величины $\mu_r^{(2)}$ в двухэтапной схеме размещения.

Интерпретируем двухэтапную схему размещения следующим образом. Пусть ячейки первого уровня размещаются по ячейкам второго уровня в соответствии с равномерным распределением; обозначим через A_{ji} событие [j-я ячейка 1-го слоя попала в i-ю ячейку 2-го слоя]. После этого частицы распределяются по ячейкам второго уровня в соответствии со случайным вектором вероятностей π таким, что $\pi_i = \sum_{j=1}^{N_1} p_j^{(1)} X(A_{ji})$, здесь $X(A)$ - индикатор события A, $p_j^{(1)}$ - вероятности ячеек первого слоя.

Считая $r \geq 2$ фиксированным, обозначим $\sigma^2 = \mathbf{D}\mu_r^{(2)}$. Введем расстояние
$\rho(\mu_r^{(2)}) = \sup\limits_x |\mathbf{P}(\sigma^{-1}(\mu_r^{(2)} - \mathbf{E}\mu_r^{(2)}) < x) - \Phi(x)|$,
где $\Phi(x)$-функция стандартного нормального распределения.

Обозначим через $p_*^{(1)} = \max(p_1^{(1)}, ..., p_{N_1}^{(1)})$.

Доказана следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть l - фиксированное натуральное число, $C_0, \beta, \alpha_1, \alpha_2$ - некоторые постоянные и в схеме серий $N_0, N_1, N_2 \to \infty$, $p_*^{(1)} \to 0$ так, что*

$$\frac{N_1^{l+1}}{N_2^l} \to C_0 > 0, N_0 p_*^{(1)} \leq \beta < \infty,$$

$$0 < \alpha_1 < \frac{N_0}{N_1} < \alpha_2 < \infty, \mathbf{E}\mu_r^{(2)} \to \infty.$$

Тогда

$$\rho(\mu_r^{(2)}) = O\left(\frac{1}{N_0^a}\right), a = \min\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{l}\right).$$

Из теоремы 6 следует

Теорема 7. *Пусть l - фиксированное натуральное число, $C_0, \beta, \alpha_1, \alpha_2$ - некоторые постоянные и в схеме серий $N_0, N_1, N_2 \to \infty$, $p_*^{(1)} \to 0$ так, что*

$$\frac{N_1^{l+1}}{N_2^l} \to C_0 > 0, N_0 p_*^{(1)} \leq \beta < \infty,$$

$$0 < \alpha_1 < \frac{N_0}{N_1} < \alpha_2 < \infty, \mathbf{E}\mu_r^{(2)} \to \infty.$$

Тогда для любого фиксированного $r \geq 2$ распределение случайной величины $\frac{\mu_r^{(2)} - \mathbf{E}\mu_r^{(2)}}{\sqrt{\mathbf{D}\mu_r^{(2)}}}$ сходится к стандартному нормальному распределению.

Третья глава диссертации состоит из двух параграфов. В ней изучается схема размещения частиц, в которой число этапов бесконечно. Мы находим неоходимые и достаточные условия, при которых предельное распределение числа объединенных частиц сосредоточено в 1, а также распределение времени ожидания до момента объединения всех частиц в частном случае, когда количество ячеек в каждом слое одинаково и равно числу изначально размещаемых частиц.

Рассматривается процесс размещения частиц по слоям ячеек следующего вида. На первом этапе N_0 исходных частиц независимо и равновероятно размещаются по N_1 ячейкам первого слоя. Частицы, попадающие в одну и ту же ячейку первого слоя, объединяются в одну новую частицу; при этом в первом слое получается случайное число ψ_1 объединенных частиц (равное числу ячеек первого слоя, занятых исходными частицами). В общем случае на $(k + 1)$-м этапе ψ_k объединенных частиц, находящихся в N_k ячейках k-го слоя, независимо (друг от друга и от предыстории) и равновероятно размещаются по N_{k+1} ячейкам $(k + 1)$-го слоя; частицы, попадающие в одну и ту же ячейку $(k + 1)$-го слоя, объединяются, в результате чего получается ψ_{k+1} объединенных частиц в $(k + 1)$-м слое. При сделанных предположениях последовательность $\psi_0, \psi_1, \ldots$ образует цепь Маркова с невозрастающими траекториями.

В первом параграфе главы 3 доказана следующая теорема:

Теорема 8. *Если $N_* = \min\limits_{k \geq 0} N_k \geq 2$, то*

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{k\to\infty} \psi_k > 1\right\} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{N_k} < \infty.$$

Во втором параграфе мы изучаем бесконечную схему, в которой размеры слоев одинаковы и совпадают с числом изначально размещаемых частиц, то есть $N_0 = N_1 = N_2 = ... = n$. Обозначим через τ_n первый момент, когда все частицы объединяются в одну. Показано, что предельное распределение τ_n при линейной нормировке является распределением суммы независимых экспоненциально распределенных случайных величин.

Теорема 9. *При $n \to \infty$ распределения случайных величин $\zeta_n = \frac{\tau_n}{n}$ сходятся к распределению суммы $\xi = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j$, где случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и*

$$\mathbf{P}(\xi_j \leq x) = 1 - e^{-xj(j+1)/2}, x \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Для доказательства требуются две дополнительных леммы. Положим

$$T(0) = 0,\ T(j) = \min(t : \psi_t \leq j), \quad \eta_j = T(j) - T(j+1), \quad j = n-1, ..., 1.$$

Здесь η_j - «время перехода» от $j+1$ объединенных частиц к j объединенным частицам, причем

$$\{\eta_j > 0\} = \{\min(t : \psi_t \leq j) > \min(t : \psi_t \leq j+1)\} = \{\psi_{T(j+1)} = j+1\}.$$

Следующая оценка является новой по сравнению с доказательствами в работах по математическим моделям эволюционной генетики (упомянутая выше статья [11]), а также с доказательствами статей [12–14].

Лемма 2. *Если $k < n$, то*

$$\mathbf{P}\{\eta_k = 0\} \leq \frac{k^2}{3(n-k)}\,.$$

Доказательство этой леммы использует новый результат для классической схемы размещения частиц. Обозначим через $\overline{\mu}_1(m,n)$ число непустых ячеек при равновероятном размещении m частиц по n ячейкам в классической схеме размещения.

Лемма 3. *Если $k < m < n$, то*

$$\frac{\mathbf{P}\{\overline{\mu}_1(m,n) \leq k\}}{\mathbf{P}\{\overline{\mu}_1(m,n) \leq k+1\}} \leq \frac{\mathbf{P}\{\overline{\mu}_1(m,n) = k\}}{\mathbf{P}\{\overline{\mu}_1(m,n) = k+1\}} \leq \frac{k^2}{3(n-k)}\,.$$

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю, доктору физико-математических наук А.М. Зубкову за постоянное внимание к работе и ценные советы, а также профессору, доктору физико-математических наук В.А. Ватутину и доктору физико-математических наук В.Г. Михайлову за многочисленные обсуждения и важные замечания.

Работы автора по теме диссертации

[1] Зубков А. М., Шибанов О. К. *Многоступенчатые схемы размещения частиц по ячейкам.* — Обозр. прикл. и промышл. матем., 2002, т. 9, вып. 1, с. 115–116.

[2] Зубков А.М.,Шибанов О. К. *Двухступенчатая схема размещения частиц по ячейкам.* — Обозр. прикл. и промышл. матем., 2002, т. 9, вып. 2, с. 378-379.

[3] Зубков А.М., Шибанов О.К. *Пуассоновская предельная теорема для двухэтапной равновероятной схемы размещения частиц по ячейкам.* — Дискретная математика, 2006, т. 18, вып. 4, с. 99-104.

[4] Зубков А.М., Шибанов О.К. *Пуассоновская предельная теорема для двухэтапной полиномиальной схемы размещения частиц по ячейкам.* — Обозр. прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, вып. 3, с. 422-434.

[5] Зубков А.М., Шибанов О.К. *Время до объединения всех частиц при равновероятных размещениях по последовательности слоев ячеек.* — Математические заметки, 2009, т. 85, вып. 3, с. 373-381.

[6] Шибанов О.К. *Предельные теоремы для двухступенчатой схемы размещения частиц по ячейкам.* — Обозр. прикл. и промышл. матем., 2003, т. 10, вып. 1, с. 253.

Во всех совместных работах А.М. Зубкову принадлежат постановка задач и выбор метода, а диссертанту - поиск и разработка доказательств.