А.М.ЗУБКОВ, О.К.ШИБАНОВ

ПУАССОНОВСКАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ДВУХЭТАПНОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СХЕМЫ РАЗМЕЩЕНИЯ ЧАСТИЦ ПО ЯЧЕЙКАМ

Рассматривается двухэтапная схема размещения частиц по ячейкам. На первом этапе N_0 исходных частиц независимо размещаются по N_1 ячейкам первого слоя в соответствии с распределением $\left(p_1^{(1)}, \ldots, p_{N_1}^{(1)}\right)$. На втором этапе N_1 ячеек первого слоя рассматриваются как частицы, и они независимо размещаются (вместе с содержащимися в них исходными частицами) по N_2 ячейкам второго слоя в соответствии с распределением $\left(p_1^{(2)}, \ldots, p_{N_2}^{(2)}\right)$. Указаны условия, при которых распределение числа ячеек второго слоя, содержащих ровно $r = \text{const}$ частиц, сходится к распределению Пуассона. Найдены предельные распределения максимального заполнения ячеек второго слоя.

Работа поддерживалась Программой Отделения математических наук РАН "Современные проблемы теоретической математики" и грантом НШ-4129.2006.1 Программы поддержки ведущих научных школ России.

1. Введение

В полиномиальной схеме размещения частиц по ячейкам (см., например, [1]) предполагается, что имеется N ячеек и n частиц, которые независимо одна от другой размещаются по ячейкам так, что вероятность попадания k-й частицы в j-ю ячейку $(j = 1, \ldots, N)$ равна p_j для любого $k = 1, \ldots, n$. Обозначим через $\eta_j = \eta_j(n, N)$ число частиц, попавших в j-ю ячейку после размещения n частиц, и через $\mu_r(n, N)$ число ячеек, в которые попало ровно r частиц. В [1] доказано, в частности, что если $r > 1$ — константа, а $n, N \to \infty$ так, что $n \max(p_1, \ldots, p_N) \to 0, \mathbf{E}\mu_r \to \lambda \in (0, \infty)$, то

$$\mathbf{P}(\mu_r(n, N) = k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Приведенная формулировка отвечает случаю левой r-области (когда $n/N \to 0$). В настоящей работе мы рассматриваем более сложную (двухэтапную) неравновероятную схему размещения частиц по ячейкам. На первом этапе N_0 исходных частиц независимо размещаются по N_1 ячейкам первого слоя в соответствии с распределением $\mathbf{p}^{(1)} = (p_1^{(1)}, \ldots, p_{N_1}^{(1)})$. На втором этапе N_1 ячеек первого слоя рассматриваются как частицы, и они независимо размещаются по N_2 ячейкам второго слоя вместе с содержащимися в них исходными частицами в соответствии с распределением $\mathbf{p}^{(2)} = (p_1^{(2)}, \ldots, p_{N_2}^{(2)})$. Будем через $\mu_r(N_0, \mathbf{p}^{(1)}) = \mu_r$ обозначать число ячеек первого слоя, в которые попало ровно r частиц; число ячеек второго слоя, в которые попало ровно r исходных частиц, обозначим $\mu_r^{(2)}(N_0, \mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}) = \mu_r^{(2)}$; пусть $p_*^{(1)} = \max(p_1^{(1)}, \ldots, p_{N_1}^{(1)})$, $p_*^{(2)} = \max(p_1^{(2)}, \ldots, p_{N_2}^{(2)})$.

Равновероятные многоэтапные (многоступенчатые) схемы размещения были введены в [2], эквивалентная двухэтапная схема рассматривалась в [3]; пуассоновские предельные теоремы для $\mu_r^{(2)}$ в двухступенчатых схемах были сформулированы в [4] и доказаны в [5]; распределение максимального заполнения ячеек второго слоя описано в [6].

Теорема 1. *Если параметры двухступенчатой схемы размещения изменяются так, что* $\min\left(N_0, N_1^{1-[r/2]^{-1}}\right) p_*^{(1)} \to 0,\ \min(N_0, N_1) p_*^{(2)} \to 0,\ \mathbf{E}\mu_r^{(2)} \to \lambda \in (0,\infty)$, *то*

$$\mathbf{P}(\mu_r^{(2)} = k) \to \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

При доказательстве этой теоремы используется следующее утверждение, относящееся к обычной полиномиальной схеме размещения и представляющее самостоятельный интерес.

Теорема 2. *При любых целых* $l, m \geq 1$, $l + m < N_0$, *справедливы неравенства*

$$C_{l+m}^l \frac{1}{N_1} \left(1 - p_*^{(1)}\right)^{N_0} \left(1 - \frac{l}{N_0 - m}\right)^m \leq \frac{\mathbf{E}\mu_{l+m}}{\mathbf{E}\mu_l \mathbf{E}\mu_m} \leq C_{l+m}^l N_1^{l-1} \left(p_*^{(1)}\right)^l \frac{1}{\left(1 - p_*^{(1)}\right)^{2N_0}}. \tag{1}$$

В частности, если $l, m \geq 1$ *фиксированы, а* $\min\left(N_0, N_1^{1-(\min(l,m))^{-1}}\right) p_*^{(1)} \to 0$, *то*

$$\mathbf{E}\mu_{l+m} = o(\mathbf{E}\mu_l \mathbf{E}\mu_m).$$

Наконец, при условиях теоремы 1 можно найти распределение максимального заполнения ячеек.

Теорема 3. *Если параметры двухступенчатой схемы размещения изменяются так, что* $\min\left(N_0, N_1^{1-[r/2]^{-1}}\right) p_*^{(1)} \to 0,\ \min(N_0, N_1) p_*^{(2)} \to 0,\ \mathbf{E}\mu_r^{(2)} \to \lambda \in (0,\infty)$, *то*

$$\mathbf{P}(\max\{j : \mu_j^{(2)} > 0\} = r) \to 1 - e^{-\lambda}, \quad \mathbf{P}(\max\{j : \mu_j^{(2)} > 0\} = r - 1) \to e^{-\lambda}.$$

2. Доказательства

Введем необходимые для дальнейшего обозначения.

Будем называть ячейку первого слоя, в которую попало ровно j частиц, j-ящиком. Для вектора $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ с целыми неотрицательными координатами введем события

$C_i(\mathbf{k}) = \{$число j-ящиков, попавших в i-ю ячейку второго слоя, равно $k_j, j = 1, \ldots, r\}$.

В дальнейшем для $1 \leq i \leq N_2$ индикатор θ_i равен 1, если в i-ю ячейку второго слоя попало ровно r частиц, и равен 0 в противном случае.

Для вектора $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)\in Z_0^r,\ Z_0=\{0,1,\ldots\}$, положим

$$|\mathbf{k}|=k_1+\ldots+k_r,\quad g(\mathbf{k})=k_1+2k_2\ldots+rk_r.$$

Обозначим

$$K(r)=\{\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)\in Z_0^r:|\mathbf{k}|=r\}.$$

Наконец, при целых неотрицательных μ и k будем использовать обозначение для факториальной степени $\mu^{[k]}=\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+1)$.

Лемма 1. *Справедлива формула*

$$\mathbf{E}\mu_r^{(2)}=\sum_{i=1}^{N_2}\sum_{\mathbf{k}\in K(r)}\left(\frac{p_i^{(2)}}{1-p_i^{(2)}}\right)^{|\mathbf{k}|}\frac{1}{k_1!\ldots k_r!}\,\mathbf{E}(1-p_i^{(2)})^{N_1-\mu_0}\prod_{j=1}^{r}\mu_j^{[k_j]}.\qquad(2)$$

Если параметры схемы изменяются так, что $\min(N_0,N_1)p_*^{(2)}\to 0$, *то все степени* $1-p_i^{(2)}$ *в* (2) *можно заменить множителем* $1+o(1)$.

Доказательство леммы 1. Очевидно, что $\mu_r^{(2)}=\sum\limits_{i=1}^{N_2}\theta_i$; следовательно,

$$\mathbf{E}\mu_r^{(2)}=\sum_{i=1}^{N_2}\mathbf{P}(\theta_i=1).$$

Далее,

$$\mathbf{P}(\theta_i=1)=\sum_{\mathbf{k}\in K(r)}\mathbf{P}(C_i(\mathbf{k})),$$

и для доказательства 2 остается заметить, что

$$\mathbf{P}(C_i(\mathbf{k}))=\mathbf{E}\mu_1^{[k_1]}\ldots\mu_r^{[k_r]}\frac{1}{k_1!\ldots k_r!}(p_i^{(2)})^{|\mathbf{k}|}(1-p_i^{(2)})^{N_1-|\mathbf{k}|-\mu_0}.$$

Так как $0\le N_1-\mu_0\le\min(N_0,N_1)$, то

$$(1-p_i^{(2)})^{N_1-|\mathbf{k}|-\mu_0}\ge 1-p_*^{(2)}\min(N_0,N_1).$$

В условиях леммы последнее выражение есть $1+o(1)$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если* $r\ge 2$, $\mathbf{l}=(l_1,\ldots,l_r)\in Z_0^r$ — *фиксированный вектор,* $N_0p_*^{(1)}\to 0$, *то*

$$\mathbf{E}\mu_1^{[l_1]}\ldots\mu_r^{[l_r]}=(1+o(1))N_0^{[g(\mathbf{l})]}\sum_{\substack{1\le i_1,\ldots,i_{|\mathbf{l}|}\le N_1\\ u\ne v\Rightarrow i_u\ne i_v}}\prod_{w=1}^{r}\prod_{j=|\mathbf{l}|_{w-1}+1}^{|\mathbf{l}|_w}\frac{(p_{i_j}^{(1)})^w}{w!},\qquad(3)$$

где $|\mathbf{l}|_0=0$, $|\mathbf{l}|_w=l_1+\ldots+l_w$.

Доказательство леммы 2. В [1,стр.108] приведена формула для производящей функции совместных распределений $\mu_1, \ldots, \mu_r$ при всех значениях N_0

$$\Phi(z, \mathbf{x}, \mathbf{p}^{(1)}) = \sum_{N_0=0}^{\infty} \frac{(zN_1)^{N_0}}{N_0!} \sum_{s_1,\ldots,s_r=0}^{\infty} \mathbf{x}^{\mathbf{s}} \mathbf{P}(\mu_1 = s_1, \ldots, \mu_r = s_r),$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r)$, $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_r)$, $\mathbf{x}^s = x_1^{s_1} \ldots x_r^{s_r}$, $\mathbf{p}^{(1)} = (p_1^{(1)}, \ldots, p_{N_1}^{(1)})$, а именно:

$$\Phi(z, \mathbf{x}, \mathbf{p}^{(1)}) = \prod_{n=1}^{N_1} \left(e^{zN_1 p_n^{(1)}} + \sum_{i=1}^{r} \frac{(zN_1 p_n^{(1)})^i}{i!} (x_i - 1) \right).$$

Заметим теперь, что в силу определения функции Φ интересующие нас смешанные моменты выражаются через эту производящую функцию следующим образом: $\mathbf{E}\mu_1^{[l_1]} \ldots \mu_r^{[l_r]}$ равно коэффициенту при z^{N_0} в разложении производной $\frac{\partial^{|\mathbf{l}|}}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_r^{l_r}} \Phi$ в точке $x_1 = \ldots = x_r = 1$, умноженному на $\frac{N_0!}{N_1^{N_0}}$.

Дифференцируя функцию Φ и подставляя вместо всех x_i значение 1, получаем

$$\frac{\partial^{|\mathbf{l}|}}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_r^{l_r}} \Phi\left(z, \mathbf{x}, \mathbf{p}^{(1)}\right)\Big|_{\mathbf{x}=1} = \sum_{\substack{1 \le i_1, \ldots, i_{|\mathbf{l}|} \le N_1 \\ u \ne v \Rightarrow i_u \ne i_v}} \left(\prod_{w=1}^{r} \prod_{j=|\mathbf{l}|_{w-1}+1}^{|\mathbf{l}|_w} \frac{(zN_1 p_{i_j}^{(1)})^w}{w!} \right) e^{zN_1(1 - p_{i_1} - \ldots - p_{i_{|\mathbf{l}|}})}.$$

Коэффициент при $z^{N_0 - g(\mathbf{l})}$ в разложении экспоненты в степенной ряд равен

$$\frac{\left(N_1(1 - p_{i_1} - \ldots - p_{i_{|\mathbf{l}|}})\right)^{N_0 - g(\mathbf{l})}}{(N_0 - g(\mathbf{l}))!}.$$

Отсюда следует формула для смешанных факториальных моментов:

$$\mathbf{E}\mu_1^{[l_1]} \ldots \mu_r^{[l_r]} = N_0^{[g(\mathbf{l})]} \sum_{\substack{1 \le i_1, \ldots, i_{|\mathbf{l}|} \le N_1 \\ u \ne v \Rightarrow i_u \ne i_v}} \prod_{w=1}^{r} \prod_{j=|\mathbf{l}|_{w-1}+1}^{|\mathbf{l}|_w} \frac{\left(p_{i_j}^{(1)}\right)^w}{w!} (1 - p_{i_1}^{(1)} - \ldots - p_{i_{|\mathbf{l}|}}^{(1)})^{N_0 - g(\mathbf{l})}.$$

Для последнего множителя в правой части справедлива оценка

$$1 \ge (1 - p_{i_1}^{(1)} - \ldots - p_{i_{|\mathbf{l}|}}^{(1)})^{N_0 - g(\mathbf{l})} \ge (1 - |\mathbf{l}| p_*^{(1)})^{N_0} \ge 1 - |\mathbf{l}| p_*^{(1)} N_0 = 1 + o(1),$$

так как $|\mathbf{l}|$ — постоянная, $p_*^{(1)} N_0 \to 0$. Лемма 2 доказана.

Чтобы упростить формулы, будем использовать обозначение

$$P_s = \sum_{i=1}^{N_1} \left(p_i^{(1)}\right)^s.$$

Из последних соотношений в доказательстве леммы 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Если $s \geq 1$ — целое число, то*

$$\left(1 - p_*^{(1)}\right)^{N_0} \frac{N_0^{[s]}}{s!} P_s \leq \mathbf{E}\mu_s \leq \frac{N_0^{[s]}}{s!} P_s. \tag{4}$$

В частности, при фиксированном целом $s \geq 1$ и $N_0 p_*^{(1)} \to 0$

$$\mathbf{E}\mu_s = (1 + o(1)) \frac{N_0^{[s]}}{s!} P_s. \tag{5}$$

Доказательство теоремы 2. Согласно (4)

$$\left(1 - p_*^{(1)}\right)^{N_0} \frac{(l+m)!}{l!m!} \frac{N_0^{[l+m]}}{N_0^{[l]} N_0^{[m]}} \frac{P_{l+m}}{P_l P_m} \leq \frac{\mathbf{E}\mu_{l+m}}{\mathbf{E}\mu_l \mathbf{E}\mu_m} \leq \frac{1}{\left(1 - p_*^{(1)}\right)^{2N_0}} \frac{(l+m)!}{l!m!} \frac{N_0^{[l+m]}}{N_0^{[l]} N_0^{[m]}} \frac{P_{l+m}}{P_l P_m}. \tag{6}$$

Из неравенства Иенсена следует, что

$$\frac{1}{N_1^l} = \left(\frac{1}{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} p_j^{(1)}\right)^l \leq \frac{1}{N_1} P_l. \tag{7}$$

Далее, известно (см., например, [7]), что если $0 < a_1 \leq \ldots \leq a_N$, $0 < b_1 \leq \ldots \leq b_N$, то для любой перестановки $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_N) \in S_N$

$$\sum_{j=1}^{N} a_j b_{\sigma_j} \leq \sum_{j=1}^{N} a_j b_j \leq a_N \sum_{j=1}^{N} b_j. \tag{8}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $p_1^{(1)} \leq \ldots \leq p_{N_1}^{(1)}$. Полагая $N = N_1$, $a_j = \left(p_j^{(1)}\right)^l$, $b_j = \left(p_j^{(1)}\right)^m$, $j = 1, \ldots, N_1$, и вычисляя средние значения (8) по всем $\sigma \in S_{N_1}$, находим, что при любых $l, m \geq 1$

$$\frac{1}{N_1} P_l P_m \leq P_{l+m} \leq \left(p_*^{(1)}\right)^l P_m. \tag{9}$$

Из (7) и (9) следует, что

$$\frac{1}{N_1} \leq \frac{P_{l+m}}{P_l P_m} \leq \frac{1}{N_1} N_1^l \left(p_*^{(1)}\right)^l.$$

Используя эти оценки в (6) и замечая, что

$$\left(1 - \frac{l}{N-m}\right)^m \leq \frac{N_0^{[l+m]}}{N_0^{[l]} N_0^{[m]}} \leq 1,$$

приходим к (1). Последнее утверждение теоремы 2 непосредственно следует из (1). Теорема 2 доказана.

Лемма 3. *Если $r \geq 2$, $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_r) \in Z_0^r$ — фиксированный вектор,* $\min\left(N_0, N_1^{1-[r/2]^{-1}}\right) p_*^{(1)} \to 0$, *то*

$$\mathbf{E}\mu_1^{[l_1]} \ldots \mu_r^{[l_r]} = (1+o(1))(\mathbf{E}\mu_1)^{l_1}(\mathbf{E}\mu_2)^{l_2} \ldots (\mathbf{E}\mu_r)^{l_r}. \tag{10}$$

Доказательство леммы 3. В силу формул (3), (5) верны следующие выражения для произведения степеней математических ожиданий и факториальных моментов:

$$(\mathbf{E}\mu_1)^{l_1}(\mathbf{E}\mu_2)^{l_2} \ldots (\mathbf{E}\mu_r)^{l_r} = \prod_{w=1}^{r} \left((1+o(1)) N_0^{[w]} \sum_{i=1}^{N_1} \frac{p_i^{(1)}}{w!} \right)^{l_w} =$$

$$= (1+o(1)) N_0^{g(\mathbf{l})} \sum_{i_1,\ldots,i_{|\mathbf{l}|}=1}^{N_1} \prod_{w=1}^{r} \prod_{j=|\mathbf{l}|_{w-1}+1}^{|\mathbf{l}|_w} \frac{(p_{i_j}^{(1)})^w}{w!},$$

$$\mathbf{E}\mu_1^{[l_1]} \ldots \mu_r^{[l_r]} = N_0^{[g(\mathbf{l})]} |l|! \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_{|\mathbf{l}|} \leq N_1} \prod_{w=1}^{r} \prod_{j=|\mathbf{l}|_{w-1}+1}^{|\mathbf{l}|_w} \frac{(p_{i_j}^{(1)})^w}{w!} =$$

$$= (1+o(1)) N_0^{g(\mathbf{l})} \left(\sum_{i_1,\ldots,i_{|\mathbf{l}|}=1}^{N_1} \prod_{w=1}^{r} \prod_{j=|\mathbf{l}|_{w-1}+1}^{|\mathbf{l}|_w} \frac{(p_{i_j}^{(1)})^w}{w!} - \sum_{\substack{1 \leq i_1,\ldots,i_{|\mathbf{l}|} \leq N_1 \\ \exists k \neq m:\, i_k = i_m}} \prod_{w=1}^{r} \prod_{j=|\mathbf{l}|_{w-1}+1}^{|\mathbf{l}|_w} \frac{(p_{i_j}^{(1)})^w}{w!} \right).$$

Поэтому

$$(\mathbf{E}\mu_1)^{l_1}(\mathbf{E}\mu_2)^{l_2} \ldots (\mathbf{E}\mu_r)^{l_r} - \mathbf{E}\mu_1^{[l_1]} \ldots \mu_r^{[l_r]} = o\left((\mathbf{E}\mu_1)^{l_1}(\mathbf{E}\mu_2)^{l_2} \ldots (\mathbf{E}\mu_r)^{l_r}\right) +$$

$$+ (1+o(1)) N_0^{g(\mathbf{l})} \sum_{\substack{1 \leq i_1,\ldots,i_{|\mathbf{l}|} \leq N_1 \\ \exists k \neq m:\, i_k = i_m}} \prod_{w=1}^{r} \prod_{j=|\mathbf{l}|_{w-1}+1}^{|\mathbf{l}|_w} \frac{(p_{i_j}^{(1)})^w}{w!}.$$

Нам осталось показать, что

$$S \stackrel{\text{def}}{=} N_0^{g(\mathbf{l})} \sum_{\substack{1 \leq i_1,\ldots,i_{|\mathbf{l}|} \leq N_1 \\ \exists k \neq m:\, i_k = i_m}} \prod_{w=1}^{r} \prod_{j=|\mathbf{l}|_{w-1}+1}^{|\mathbf{l}|_w} \frac{(p_{i_j}^{(1)})^w}{w!} = o((\mathbf{E}\mu_1)^{l_1}(\mathbf{E}\mu_2)^{l_2} \ldots (\mathbf{E}\mu_r)^{l_r}).$$

При фиксированном $\mathbf{l} \in Z_0^r$ множество наборов $I = (i_{11}, \ldots, i_{1l_1}, \ldots, i_{r1}, \ldots, i_{rl_r})$ чисел из $1, \ldots, N_1$, в каждом из которых есть повторяющиеся элементы, разбивается на конечную совокупность подмножеств, определяющихся разбиениями множества $J = \{(1,1), \ldots, (1,l_1), \ldots, (r,1), \ldots, (r,l_r)\}$ на непересекающиеся подмножества $J_1(I) \bigsqcup J_2(I) \bigsqcup \ldots$ Эти подмножества определяются так: (j,m) и (j',m') входят в одно и то же $J_k = J_k(I)$ тогда и только тогда, когда $i_{jm} = i_{j'm'}$. В каждом разбиении $J_1 \bigsqcup J_2 \bigsqcup \ldots$ хотя бы одно из подмножеств J_k содержит более одного элемента. Будем использовать обозначения $u(I) = \{J_1, J_2, \ldots, J_{d(u)}\}$.

Пусть $U = \{u\}$ — множество таких разбиений. Тогда

$$S = (1+o(1)) \sum_{u \in U} N_0^{g(\mathbf{l})} \sum_{I:\, u(I)=u} \prod_{w=1}^{r} \frac{1}{(w!)^{l_w}} \prod_{q=1}^{l_w} (p^{(1)}_{i_{wq}})^w.$$

Положим $l_{wk} = |\{(w,1), \ldots, (w, l_w)\} \bigcap J_k(I)|$ и обозначим через $L_k = \sum_w w l_{wk}$ сумму показателей степеней сомножителей $(p^{(1)}_{i_{wq}})^w$ с $i_{wq} \in J_k$. Тогда $\sum_k L_k = g(\mathbf{l})$ и при $u \in U$

$$\sum_{I:\, u(I)=u} \prod_{w=1}^{r} \frac{1}{(w!)^{l_w}} \prod_{q=1}^{l_w} (p^{(1)}_{i_{wq}})^w \leq \sum_{i_1, \ldots, i_{d(u)}=1}^{N_1} \prod_{w=1}^{r} \frac{1}{(w!)^{l_w}} \prod_{k=1}^{d(u)} (p^{(1)}_{i_k})^{L_k} =$$

$$= \left(\prod_{w=1}^{r} \frac{1}{(w!)^{l_w}} \right) \prod_{k=1}^{d(u)} \sum_{i=1}^{N_1} (p^{(1)}_i)^{L_k} = \left(\prod_{w=1}^{r} \frac{1}{(w!)^{l_w}} \right) \prod_{k=1}^{d(u)} P_{L_k}.$$

Значит, при некоторой константе $C = C(\mathbf{l}) < \infty$

$$S \leq C \sum_{u \in U} N_0^{g(\mathbf{l})} \prod_{k=1}^{d(u)} P_{L_k} = C \sum_{u \in U} \prod_{k=1}^{d(u)} N_0^{L_k} P_{L_k}.$$

Условия леммы 3 обеспечивают выполнение условий следствия 1 и теоремы 2; поэтому $N_0^{L_k} P_{L_k} = O(\mathbf{E}\mu_{L_k})$ и $\mathbf{E}\mu_{L_k} = o\left(\prod_w (\mathbf{E}\mu_w)^{l_{wk}}\right)$. Следовательно,

$$S = o\left(\prod_k \prod_w (\mathbf{E}\mu_w)^{l_{wk}} \right) = o\left(\prod_w (\mathbf{E}\mu_w)^{l_w} \right).$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Если* $r \geq 2$, $m \geq 2$ *— целые числа,* $\min(N_0, N_1^{1-[r/2]^{-1}}) p_*^{(1)} \to 0$, $\min(N_0, N_1) p_*^{(2)} \to 0$, $\liminf \mathbf{E}\mu_r^{(2)} \geq \gamma > 0$, *то*

$$\mathbf{E}(\mu_r^{(2)})^{[m]} = \left(\mathbf{E}\mu_r^{(2)}\right)^m (1+o(1)).$$

Доказательство леммы 4. Обозначим через $\eta_j^{(2)}$ заполнение j-й ячейки второго слоя. Как в лемме 1, имеем

$$\mathbf{E}\mu_r^{(2)} = \sum_{i=1}^{N_2} \mathbf{P}(\theta_i = 1),$$

$$\left(\mathbf{E}\mu_r^{(2)}\right)^m = m! \sum_{1\le i_1<\ldots<i_m<N_2} \mathbf{P}(\theta_{i_1}=1)\ldots\mathbf{P}(\theta_{i_m}=1)+ \tag{11}$$

$$+\sum_{v=1}^{m-1} \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_v\ge 1\\ k_1+\ldots+k_v=m}} \frac{m!}{k_1!\ldots k_v!} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_v\le N_2} \prod_{j=1}^{v} \left(\mathbf{P}(\theta_{i_j}=1)\right)^{k_j}, \tag{12}$$

$$\mathbf{E}\left(\mu_r^{(2)}\right)^{[m]} = m! \sum_{1\le i_1<\ldots<i_m\le N_2} \mathbf{P}(\theta_{i_1}=\ldots=\theta_{i_m}=1),$$

$$\mathbf{P}(\theta_{i_1}=\ldots=\theta_{i_m}=1) = \sum_{\mathbf{k}_{i_1},\ldots,\mathbf{k}_{i_m}\in K(r)} \mathbf{P}(C_{i_1}(\mathbf{k}_{i_1})\ldots C_{i_m}(\mathbf{k}_{i_m})), \tag{13}$$

$$\mathbf{P}(\theta_i=1) = \sum_{\mathbf{k}\in K(r)} \mathbf{P}(C_i(\mathbf{k})). \tag{14}$$

Следовательно,

$$\left(\mathbf{E}\mu_r^{(2)}\right)^m - \mathbf{E}\left(\mu_r^{(2)}\right)^{[m]} =$$
$$= m! \sum_{1\le i_1<\ldots<i_m\le N_2} \left(\mathbf{P}(\theta_{i_1}=1)\ldots\mathbf{P}(\theta_{i_m}=1) - \mathbf{P}(\theta_{i_1}=\ldots=\theta_{i_m}=1)\right)+$$

$$+\sum_{v=1}^{m-1} \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_v\ge 1\\ k_1+\ldots+k_v=m}} \frac{m!}{k_1!\ldots k_v!} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_v\le N_2} \prod_{j=1}^{v} \left(\mathbf{P}(\theta_{i_j}=1)\right)^{k_j}. \tag{15}$$

Оценим сначала вторую сумму в правой части (15), обозначив ее через T. Пусть $\xi_j^{(2)}$ — номер ячейки второго слоя, в которую попала j-я ячейка первого слоя, если эта ячейка не пуста, и $\xi_j^{(2)}=0$ в противном случае; пусть $\chi(X)$ обозначает индикатор события X. Поскольку число непустых ячеек первого слоя не больше $\min(N_0,N_1)$, постольку для всех $i=1,\ldots,N_2$

$$\mathbf{E}\sum_{j=1}^{N_1} \chi(\xi_j^{(2)}=i) = \sum_{j=1}^{N_1} \mathbf{P}(\xi_j^{(2)}=i) \le \min(N_0,N_1)\, p_*^{(2)} \to 0,$$

т. е. $\mathbf{P}(\eta_i^{(2)}=0)\to 1$, а следовательно, $\mathbf{P}(\theta_i=1)\to 0$ при $r\ge 1$.

Далее, заметим, что для каждого $v\in\{1,\ldots,m-1\}$

$$\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_v\ge 1\\ k_1+\ldots+k_v=m}} \frac{m!}{k_1!\ldots k_v!} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_v\le N_2} \prod_{j=1}^{v} \left(\mathbf{P}(\theta_{i_j}=1)\right)^{k_j} \le$$

$$\le v \max_{1\le i\le N_2} \mathbf{P}(\theta_i=1) \sum_{\substack{k'_1,\ldots,k'_v\ge 1\\ k'_1+\ldots+k'_v=m-1}} m\frac{(m-1)!}{k'_1!\ldots k'_v!} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_v\le N_2} \prod_{j=1}^{v} \left(\mathbf{P}(\theta_{i_j}=1)\right)^{k'_j},$$

поскольку каждому набору $(k_1, \ldots, k_v; i_1, \ldots, i_v)$ можно сопоставить набор $(k'_1, \ldots, k'_v; i_1, \ldots, i_v)$ по следующему правилу: $k'_j = k_j$, если $j \neq j_0 = \min\{s : k_s = \max(k_1, \ldots, k_v)\}$, и $k'_{j_0} = k_{j_0} - 1$; при этом каждому набору $(k'_1, \ldots, k'_v; i_1, \ldots, i_v)$ может быть сопоставлено не более v наборов $(k_1, \ldots, k_v; i_1, \ldots, i_v)$. Проводя суммирование по v и учитывая условия леммы, получим оценку

$$T \leq m^2 \max_{1 \leq i \leq N_2} \mathbf{P}(\theta_i = 1) \left(\mathbf{E}\mu_r^{(2)}\right)^{m-1} = o\left(\left(\mathbf{E}\mu_r^{(2)}\right)^m\right). \tag{16}$$

Покажем, что аналогичная оценка справедлива и для первой суммы в правой части (15). В силу (12) для этого достаточно доказать, что при условиях леммы равномерно по множеству наборов попарно различных индексов $1 \leq i_1, \ldots, i_m \leq N_2$

$$\mathbf{P}(\theta_{i_1} = \ldots = \theta_{i_m} = 1) = \mathbf{P}(\theta_{i_1} = 1) \ldots \mathbf{P}(\theta_{i_m} = 1)(1 + o(1)). \tag{17}$$

В свою очередь, для этого в силу (13) и (14) достаточно показать, что равномерно по всем наборам $\mathbf{k}_{i_1} = (k_{i_1 1}, \ldots, k_{i_1 r}), \ldots, \mathbf{k}_{i_m} = (k_{i_m 1}, \ldots, k_{i_m r}) \in K(r)$

$$\mathbf{P}(C_{i_1}(\mathbf{k}_{i_1}) \ldots C_{i_m}(\mathbf{k}_{i_m})) = \mathbf{P}(C_{i_1}(\mathbf{k}_{i_1})) \ldots \mathbf{P}(C_{i_m}(\mathbf{k}_{i_m}))(1 + o(1)). \tag{18}$$

Будем использовать обозначения $k_{\cdot s} = k_{i_1,s} + \ldots + k_{i_m s}$, $|\mathbf{k}_{i_j}| = k_{i_j 1} + \ldots + k_{i_j r}$. Левая часть (18) равна

$$\mathbf{E}\mu_1^{[k_{\cdot 1}]} \ldots \mu_r^{[k_{\cdot r}]} \frac{\left(p_{i_1}^{(2)}\right)^{|\mathbf{k}_{i_1}|} \ldots \left(p_{i_m}^{(2)}\right)^{|\mathbf{k}_{i_m}|}}{k_{i_1 1}! \ldots k_{i_1 r}! \ldots k_{i_m 1}! \ldots k_{i_m r}!} \left(1 - p_{i_1}^{(2)} - \ldots - p_{i_m}^{(2)}\right)^{N_1 - \mu_0 - |\mathbf{k}_{i_1}| - \ldots - |\mathbf{k}_{m_1}|}.$$

В силу неравенств $1 - m\min(N_0, N_1)\, p_*^{(2)} \leq \left(1 - p_{i_1}^{(2)} - \ldots - p_{i_m}^{(2)}\right)^{N_1 - \mu_0 - |\mathbf{k}_{i_1}| - \ldots - |\mathbf{k}_{m_1}|} \leq 1$ и условий леммы последний множитель имеет вид $1 + o(1)$ при фиксированном m.

С другой стороны, множители в правой части (18) имеют вид

$$\mathbf{P}(C_{i_s}(\mathbf{k}_{\mathbf{i_s}})) = \mathbf{E}\mu_1^{[k_{i_s 1}]} \ldots \mu_r^{[k_{i_s r}]} \frac{1}{k_{i_s 1}! \ldots k_{i_s r}!} \left(p_{i_s}^{(2)}\right)^{|\mathbf{k}_{i_s}|} \left(1 - p_{i_s}^{(2)}\right)^{N_1 - \mu_0 - |\mathbf{k}_{i_s}|}, \; s = 1, \ldots, m; \tag{19}$$

последний множитель при условиях леммы есть $1 + o(1)$. Поэтому (18) эквивалентно соотношению

$$\mathbf{E}\mu_1^{[k_{\cdot 1}]} \ldots \mu_r^{[k_{\cdot r}]} = (1 + o(1) \prod_{j=1}^m \mathbf{E}\mu_1^{[k_{i_j 1}]} \ldots \mu_r^{[k_{i_j r}]}. \tag{20}$$

Из леммы 3 следует, что равномерно по $\mathbf{k}_{i_1}, \ldots, \mathbf{k}_{i_m} \in K(r)$

$$\mathbf{E}\mu_1^{[k_{\cdot 1}]} \ldots \mu_r^{[k_{\cdot r}]} = (1 + o(1)) \left(\mathbf{E}\mu_1\right)^{k_{\cdot 1}} \ldots \left(\mathbf{E}\mu_r\right)^{k_{\cdot r}},$$
$$\mathbf{E}\mu_1^{[k_{i_j 1}]} \ldots \mu_r^{[k_{i_j r}]} = (1 + o(1)) \left(\mathbf{E}\mu_1\right)^{k_{i_j 1}} \ldots \left(\mathbf{E}\mu_r\right)^{k_{i_j r}}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

а значит (снова по лемме 3),

$$\mathbf{E}\mu_1^{[k_{\cdot 1}]}\ldots\mu_r^{[k_{\cdot r}]}-\prod_{j=1}^{m}\mathbf{E}\mu_1^{[k_{i_j1}]}\ldots\mu_r^{[k_{i_jr}]}=$$

$$=(1+o(1))\,(\mathbf{E}\mu_1)^{k_{\cdot 1}}\ldots(\mathbf{E}\mu_r)^{k_{\cdot r}}-(1+o(1))\prod_{j=1}^{m}(\mathbf{E}\mu_1)^{k_{i_j1}}\ldots(\mathbf{E}\mu_r)^{k_{i_jr}}=$$

$$=o\left((\mathbf{E}\mu_1)^{k_{\cdot 1}}\ldots(\mathbf{E}\mu_r)^{k_{\cdot r}}\right)=o\left(\mathbf{E}\mu_1^{[k_{\cdot 1}]}\ldots\mu_r^{[k_{\cdot r}]}\right).$$

Итак, равенство (20) доказано, и тем самым доказаны равенства (18) и (17).

Наконец, из (17) суммированием по всем наборам индексов $i_1,\ldots,i_m$ получаем

$$m!\sum_{1\le i_1<\ldots<i_m\le N_2}\left(\mathbf{P}(\theta_{i_1}=1)\ldots\mathbf{P}(\theta_{i_m}=1)-\mathbf{P}(\theta_{i_1}=\ldots=\theta_{i_m}=1)\right)=$$

$$=o\left(\left(\sum_{i=1}^{N_2}\mathbf{P}(\theta_i=1)\right)^m\right)=o\left(\left(\mathbf{E}\mu_r^{(2)}\right)^m\right).$$

Отсюда и из (15), (16) следует, что

$$\left(\mathbf{E}\mu_r^{(2)}\right)^m-\mathbf{E}\left(\mu_r^{(2)}\right)^{[m]}=o\left(\left(\mathbf{E}\mu_r^{(2)}\right)^m\right).$$

Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы 1. Согласно лемме 4 в условиях теоремы 1 при любом $m=1,2,\ldots$

$$\mathbf{E}\mu_r^{[m]}\to\lambda^m;$$

значит, распределение $\mu_r^{(2)}$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ.

Теорема 1 доказана.

Лемма 5. *В условиях леммы* 4 *для достаточно больших* N_0,N_1 *выполнено неравенство*

$$\mathbf{E}\mu_{r+1}^{(2)}\le 2(r+2)\max(N_0p_*^{(1)},\min(N_0,N_1)p_*^{(2)})\mathbf{E}\mu_r^{(2)}.$$

Доказательство леммы 5. В соответствии с леммой 1

$$\mathbf{E}\mu_s^{(2)}=\sum_{i=1}^{N_2}\sum_{\mathbf{k}\in K(s)}\mathbf{P}(C_i(\mathbf{k})).$$

Сопоставим каждому вектору $\mathbf{k}\in K(r+1)$ с $k_1\le r$ вектор $\mathbf{k}^*\in K(r)$ так: выберем наибольшую по номеру позицию в векторе $\mathbf{k}$, на которой стоит число, отличное от нуля, и уменьшим его на 1, а предыдущее число увеличим на 1. Для вектора $\mathbf{k}$ с $k_1=r+1$, $k_j=0\,(j>1)$ положим $k_1^*=r$, $k_j^*=0\,(j>1)$

При этом соответствии одному вектору $\mathbf{k}^*$ сопоставляется не более двух векторов $\mathbf{k}$, именно, вектору $\mathbf{k}^* = (k_1^*, \dots, k_r^*) \in K(r)$ могут отвечать векторы

$$\mathbf{k}_{(1)} = (k_1^*, \dots, k_{r-1}^*, k_r^* - 1, 1),\ \mathbf{k}_{(2)} = (k_1^*, \dots, k_{r-1}^* - 1, k_r^* + 1, 0) \in K(r+1).$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$\mathbf{P}(C_i(\mathbf{k})) \le (r+2) \max(N_0 p_*^{(1)}, \min(N_0, N_1) p_*^{(2)}) \mathbf{P}(C_i(\mathbf{k}^*)), \tag{21}$$

Суммирование неравенства (21) по всем $\mathbf{k} \in K(r)$ и $i = 1, \dots, N_2$ дает искомое неравенство.

Для доказательства (21) представим правую и левую части в виде сумм, а затем проведем почленное сравнение их слагаемых.

Из формулы (19) и леммы 2 следует, что при $\mathbf{k} \in K(r+1)$

$$\mathbf{P}(C_i(\mathbf{k})) = (1 + o(1)) N_0^{[r+1]} \frac{\left(p_i^{(2)}\right)^{|\mathbf{k}|}}{k_1! \dots k_{r+1}!} \sum_{\substack{1 \le i_1, \dots, i_{|\mathbf{k}|} \le N_1 \\ u \ne v \Rightarrow i_u \ne i_v}} \prod_{w=1}^{r+1} \prod_{j=|\mathbf{k}|_{w-1}+1}^{|\mathbf{k}|_w} \frac{\left(p_{i_j}^{(1)}\right)^w}{w!}. \tag{22}$$

Для достаточно больших N_0, N_1 первый множитель $1 + o(1)$ лежит в интервале от $\frac{4}{5}$ до 1, и по условию либо $N_1 p_*^{(2)} \le 1$, либо $N_0 p_*^{(2)} \le 1$.

Пусть $k_1 = r + 1$, $k_j = 0\,(j > 1)$; тогда $k_1^* = r$. Если $N_1 p_*^{(2)} \le 1$, то, заменяя множитель $p_{i_{k_1}}^{(1)}$ и один множитель из скобки $(p_i^{(2)})^{\mathbf{k}}$ числами $p_*^{(1)}$ и $p_*^{(2)}$ соответственно, получаем

$$\mathbf{P}(C_i(\mathbf{k})) \le N_0 N_0^{[r]} \frac{1}{r!(r+1)} \left(p_i^{(2)}\right)^r p_*^{(2)} \sum_{\substack{i_1 \le i_1, \dots, i_r \le N_1 \\ u \ne v \Rightarrow i_u \ne i_v}} \frac{p_{i_1}^{(1)} \dots p_{i_r}^{(1)}}{(1!)^{k_1}} N_1 p_*^{(1)} \le$$
$$\le \frac{5}{4} N_0 N_1 p_*^{(1)} p_*^{(2)} \mathbf{P}(C_i(\mathbf{k}^*)) \le 2(r+2) N_0 p_*^{(1)} \mathbf{P}(C_i(\mathbf{k}^*)).$$

Если $N_0 p_*^{(2)} \le 1$, то, суммируя правую часть (22) по i_{r+1}, получаем

$$\mathbf{P}(C_i(\mathbf{k})) \le N_0 N_0^{[r]} \frac{1}{r!(r+1)} \left(p_i^{(2)}\right)^r p_*^{(2)} \sum_{\substack{i_1 \le i_1, \dots, i_r \le N_1 \\ u \ne v \Rightarrow i_u \ne i_v}} \frac{p_{i_1}^{(1)} \dots p_{i_r}^{(1)}}{(1!)^{k_1}} \le$$
$$\le \frac{5}{4} N_0 p_*^{(2)} \mathbf{P}(C_i(\mathbf{k}^*)) \le 2(r+2) N_0 p_*^{(2)} \mathbf{P}(C_i(\mathbf{k}^*)).$$

Пусть теперь $k_1 < r + 1$. Обозначим последнее отличное от нуля число среди $k_1, \dots, k_{r+1}$ через k_h и введем (новый) индекс $i_{(h-1)(k_{h-1}+1)} = i_{hk_h}$.

Так как $|\mathbf{k}| = k_1 + \ldots + k_{r+1} = k_1^* + \ldots + k_r^* = |\mathbf{k}^*|$, то

$$\mathbf{P}(C_i(\mathbf{k})) \le N_0^{[r+1]} \frac{1}{k_1! \ldots k_{r+1}!} \left(p_i^{(2)}\right)^{|\mathbf{k}|} \sum_{\substack{1 \le i_1, \ldots, i_{|\mathbf{k}|} \le N_1 \\ u \ne v \Rightarrow i_u \ne i_v}} \prod_{w=1}^{h} \prod_{j=|\mathbf{k}|_{w-1}+1}^{|\mathbf{k}|_w} \frac{\left(p_{i_j}^{(1)}\right)^w}{w!} \le$$

$$\le N_0 N_0^{[r]} \frac{k_{h-1}+1}{k_1! \ldots (k_{h-1}+1)!(k_h-1)!} \left(p_i^{(2)}\right)^{|\mathbf{k}|} \sum_{\substack{1 \le i_1, \ldots, i_{|\mathbf{k}|} \le N_1 \\ u \ne v \Rightarrow i_u \ne i_v}} \prod_{w=1}^{h} \prod_{j=|\mathbf{k}|_{w-1}+1}^{|\mathbf{k}|_w} \frac{\left(p_{i_j}^{(1)}\right)^w}{w!} \le$$

$$\le N_0 N_0^{[r]} \frac{k_{h-1}+1}{k_1! \ldots (k_{h-1}+1)!(k_h-1)!} \left(p_i^{(2)}\right)^{|\mathbf{k}^*|} \sum_{\substack{1 \le i_1, \ldots, i_{|\mathbf{k}^*|} \le N_1 \\ u \ne v \Rightarrow i_u \ne i_v}} p_*^{(1)} \prod_{w=1}^{h} \prod_{j=|\mathbf{k}^*|_{w-1}+1}^{|\mathbf{k}^*|_w} \frac{\left(p_{i_j}^{(1)}\right)^w}{w!} \le$$

$$\le (r+2) N_0 p_*^{(1)} \mathbf{P}(C_i(\mathbf{k}^*)),$$

поскольку $k_{h-1} + 1 \le r + 2$.

Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы 3. Заметим, что из леммы 5 в условиях теоремы 3 следует, что $\mathbf{E}\mu_q^{(2)} \to 0$ для всех $q > r$ и что $\mathbf{E}\mu_q^{(2)} \to \infty$ для всех $q < r$.

Обозначим $\mu^* = \max\{j : \mu_j^{(2)} > 0\}$.

Докажем, что выполняются соотношения

$$\mathbf{P}(\mu^* \le r-2) \to 0, \quad \mathbf{P}(\mu^* \ge r+1) \to 0. \tag{23}$$

Из леммы 4 следует, что

$$\left(\mathbf{E}\mu_{r-1}^{[2]}\right)^2 = \mathbf{E}\left(\mu_{r-1}^{(2)}\right)^2 (1 + o(1)),$$

поэтому

$$\mathbf{D}\mu_{r-1}^{(2)} = \left(\mathbf{E}\mu_{r-1}^{(2)}\right)^{[2]} - \left(\mathbf{E}\mu_{r-1}^{(2)}\right)^2 + \mathbf{E}\mu_{r-1}^{(2)} = o\left(\left(\mathbf{E}\mu_{r-1}^{(2)}\right)^2\right).$$

Применяя неравенство Чебышева, получаем

$$\mathbf{P}(\mu^* < r-1) \le \mathbf{P}(\mu_{r-1}^{(2)} = 0) \le \mathbf{P}(|\mu_{r-1}^{(2)} - \mathbf{E}\mu_{r-1}^{(2)}| \ge \mathbf{E}\mu_{r-1}^{(2)}) \le \frac{\mathbf{D}\mu_{r-1}^{(2)}}{\left(\mathbf{E}\mu_{r-1}^{(2)}\right)^2} \to 0.$$

Далее,

$$\mathbf{P}(\mu^* \ge r+1) \le \mathbf{E}\mu_{r+1}^{(2)} + \ldots + \mathbf{E}\mu_{N_2}^{(2)}.$$

В силу леммы 5 при достаточно больших N_0, N_1

$$\mathbf{E}\mu_{r+n}^{(2)} \le \mathbf{E}\mu_r^{(2)} \left(2(r+2)N_0 p_*^{(1)}\right)^n,$$

следовательно,

$$\mathbf{P}(\mu^* \geq r+1) \leq N_0 p_*^{(1)} \mathbf{E}\mu_r^{(2)} \frac{1}{1-2(r+2)N_0 p_*^{(1)}} \to 0.$$

Таким образом, (23) доказано. Заметим, что

$$\mathbf{P}(\mu^* = r) = \mathbf{P}(\mu_r^{(2)} > 0, \mu_{r+1}^{(2)} + \ldots + \mu_{N_2}^{(2)} = 0) =$$
$$= \mathbf{P}(\mu_r^{(2)} > 0) - \mathbf{P}(\mu_r^{(2)} > 0, \mu_{r+1}^{(2)} + \ldots + \mu_{N_2}^{(2)} > 0).$$

Первое слагаемое стремится к $1 - e^{-\lambda}$ в силу теоремы 1, а второе можно оценить так:

$$\mathbf{P}(\mu_r^{(2)} > 0, \mu_{r+1}^{(2)} + \ldots + \mu_{N_2}^{(2)} > 0) \leq \mathbf{P}(\mu_{r+1}^{(2)} + \ldots + \mu_{N_2}^{(2)} > 0) = \mathbf{P}(\mu^* \geq r+1) \to 0.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(\mu^* = r) \to 1 - e^{-\lambda}.$$

Кроме того,

$$\mathbf{P}(\mu^* = r-1) = 1 - \mathbf{P}(\mu^* = r) - \mathbf{P}(\mu^* < r-1) - \mathbf{P}(\mu^* \geq r+1) \to e^{-\lambda}.$$

Теорема 3 доказана.

Литература

[1] Колчин В.Ф., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Случайные размещения. — М., Наука, 1976.

[2] Зубков А.М., Шибанов О.К. Многоступенчатые схемы размещения частиц по ячейкам. — Обозр. прикл. и промышл. матем., 2002, т. 9, в. 1, с.

[3] Агиевич С.В. Двухэтапные размещения и двойная Q-функция. — Обозр. прикл. и промышл. матем., 2003, т. 10, в. 1, с. 82.

[4] Зубков А.М., Шибанов О.К. Двухэтапные схемы размещения частиц по ячейкам. — Обозр. прикл. и промышл. матем., 2002, т. 9, в. 2, с. 378–379.

[5] Зубков А.М., Шибанов О.К. Пуассоновская предельная теорема для двухэтапной равновероятной схемы размещения частиц по ячейкам. — Дискретная математика, 2006, т. , вып. , с.

[6] Шибанов О.К. Предельные теоремы для двухступенчатой схемы размещения частиц по ячейкам. — Обозр. прикл. и промышл. матем., 2003, т. 10, в. 1, с. 253.

[7] Харди Г., Литтлвуд Дж., Полиа Г. Неравенства. — М., ИЛ, 1948.